Code No. : 2073

B. A./B. Sc. (Part II)

Examination, 2021-22

MATHEMATICS

Paper Third

(Advanced Calculus and Numerical Analysis)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 50*

Note : (i) Answer *five* questions in all.

(ii) Question No. **1** is *compulsory*.

(iii) Select *two* questions from each Section.

(iv) All questions carry equal marks.

(v) Use of Scientific calculator is permitted.

नोट : (i) कुल *पाँच* प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न संख्या 1 *अनिवार्य* है।

(iii) प्रत्येक खण्ड से *दो* प्रश्न कीजिए।

(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(v) वैज्ञानिक कैल्कुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P. T. O.

1. (a) Show that the limit :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

does not exist.

दर्शाइये कि सीमा :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

का अस्तित्व नहीं है।

(b) If $\vec{r} = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{j} + t\hat{k}$, find $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$.

यदि $\vec{r} = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{j} + t\hat{k}$, तो $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ प्राप्त कीजिए।

(c) If $r = |\vec{r}|$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, prove that :

$$\nabla r = \frac{1}{r}\vec{r}$$

यदि $r = |\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, सिद्ध कीजिए :

$$\nabla r = \frac{1}{r}\vec{r}$$

(d) Prove that :

$$(1+\Delta)(1-\nabla) \equiv 1$$

सिद्ध कीजिए :

$$(1+\Delta)(1-\nabla) \equiv 1$$

(e) Write the Lagrange's interpolation formula for unequal intervals.
असमान अन्तरालों के लिए लैग्रान्ज का अन्तर्वेशन सूत्र लिखिए।

Section—A
खण्ड—अ

2. (a) Expand $x^2y + 3y - 2$ in power of $(x-1)$ and $(y+2)$ by using Taylor's theorem.
टेलर प्रमेय का उपयोग करते हुए $x^2y + 3y - 2$ को $(x-1)$ और $(y+2)$ की घातों में प्रसारित कीजिए।

(b) Show that the function :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

is continuous at (0, 0).
दर्शाइये कि फलन :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(0, 0) पर सतत् है।

3. (a) If u_1, u_2 are functions of y_1, y_2 and y_1, y_2 are functions of x_1, x_2, then show that :

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(y_1,y_2)} \cdot \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}$$

यदि u_1, u_2 y_1, y_2 के फलन हैं और y_1, y_2 x_1, x_2 के फलन हैं, तब दर्शाइये कि :

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(y_1,y_2)} \cdot \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}$$

(b) Discuss the maxima and minima of the function :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$$

फलन $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 5$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए।

4. (a) Prove that :

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{curl} \vec{u} - \vec{u} \operatorname{curl} \vec{v}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{curl} \vec{u} - \vec{u} \operatorname{curl} \vec{v}$$

(b) Prove that :

$$\text{div}\left(\text{grad}\,\frac{1}{r}\right) = 0$$

where $r = |\vec{r}|$.

सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{div}\left(\text{grad}\,\frac{1}{r}\right) = 0$$

जहाँ $r = |\vec{r}|$ ।

5. (a) If $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, then evaluate $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$.

यदि $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ और S एक घन का पृष्ठ है जो कि $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, से घिरा हुआ है, तो $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) State and prove Green's theorem.

ग्रीन के प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

P. T. O.

Section—B

खण्ड—ब

6. (a) Estimate the missing term in the following table :

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	?
4	81

निम्नलिखित सारणी में लुप्त पद का मान ज्ञात कीजिए :

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	?
4	81

(b) Define the operators Δ, ∇, E and show that :

$$E\nabla \equiv \nabla E = \Delta$$

संकारकों Δ, ∇, E को परिभाषित कीजिए और दिखाइये कि :

$$E\nabla \equiv \nabla E = \Delta$$

7. (a) Show that the sum of the Lagrangian coefficient is unity.

दिखाइये कि लैग्रान्जियन गुणांकों का योग इकाई होता है।

(b) Show that :

$$\underset{bcd}{\Delta^3}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{abcd}$$

दर्शाइये कि :

$$\underset{bcd}{\Delta^3}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{abcd}$$

8. (a) Discuss the Bisection method to find the root of the equation.

समीकरण का मूल निकालने के लिए द्विविभाजन विधि की व्याख्या कीजिए।

(b) Evaluate :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

by using Simpson's one-third rule by dividing the interval [0, 1] into 5 equal parts.

समाकलन अन्तराल [0, 1] को 5 समान भागों में विभक्त कर समाकलन :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

का मान सिम्पसन के एक-तिहाई नियम से ज्ञात कीजिए।

9. (a) Discuss Picard's method of successive approximations for the solution of first order differential equation.

प्रथम कोटि के अवकल समीकरण को हल करने के लिए पिकार्ड के उत्तरोत्तर अनुमान विधि की व्याख्या कीजिए।

(b) Given $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}$, where $y(1) = 1$, find $y(1.1)$ using Runge-Kutta fourth order method.

दिया है $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}$, जहाँ $y(1) = 1$ रुंगे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि का प्रयोग करते हुए $y(1.1)$ का मान ज्ञात कीजिए।