

Code No. : 2072

B. A./B. Sc. (Part II)
Examination, 2021-22

MATHEMATICS

Paper Second

(Real Analysis)

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

Note : (i) Attempt five questions in all.

- (ii) Question No. 1 is *compulsory*.
- (iii) Answer *two* questions from Section A and Section B each.
- (iv) All questions carry equal marks.

नोट : (i) कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- (ii) प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है।
- (iii) खण्ड 'अ' तथा खण्ड 'ब' प्रत्येक से दो-दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
- (iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

[2]

2072

1. Answer all the parts of the following :

निम्नलिखित सभी भागों के उत्तर दीजिए।

- (a) Give an example to show that the infimum and supremum of a set may not belong to the set.

उदाहरण देकर दर्शाइये कि किसी समुच्चय के उच्चक और निम्नक का उस समुच्चय में होना आवश्यक नहीं है।

- (b) Let $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ be a series of positive terms such that $\sum u_n$ converges. Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

मान लीजिये कि $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ धनात्मक पदों वाली एक श्रेणी इस प्रकार है कि $\sum u_n$ अभिसरित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ।

- (c) Show that the sequence $\left\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$ is a Cauchy sequence.

दिखाइये कि अनुक्रम $\left\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$ एक कौशी अनुक्रम है।

P. T. O.

- (d) Explain whether the Lagrange's mean value theorem is applicable for the function

$$f(x) = |x|, \forall x \in [-1, 1] \text{ or not?}$$

व्याख्या कीजिये कि क्या लेजान्ज की मध्यमान प्रमेय फलन $f(x) = |x|, \forall x \in [-1, 1]$ पर अनुप्रयोज्य है अथवा नहीं?

- (e) Test the convergence of the integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

समाकलन $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Section—A

अण्ड अ

2. Prove that a set X is complete in the sense of lower boundedness iff it is complete in the sense of upper boundedness.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय X निम्न परिवद्धता के सम्बन्ध में पूर्ण होगा यदि और केवल यदि वह उपरिवद्धता के सम्बन्ध में पूर्ण हो।

3. (a) Prove that every convergent sequence has unique limit point.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसरित अनुक्रम का सीमा बिन्दु आद्वितीय होता है।

P. T. O

सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}$$

by using Cauchy's test.

कॉले काचि का टेस्ट प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}$$

4. (a) Test the convergence of the series

$$1 + \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot n^2}{4^n}$$

के

$$1 + \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot n^2}{4^n}$$

की अभिसारिता परीक्षण कीजिए।

- (b) State and prove Cauchy's n th root test for the convergence of a series of positive terms

क्याहकक पदों वाली श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण करने हेतु कॉले काचि के n वें मूल परीक्षण को बताइए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

5. Prove that the series $\sum \frac{1}{n^p}$ is convergent or divergent according as $p > 1$ or $p \leq 1$.

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum \frac{1}{n^p}$ अभिसारी या अपसारी

होगी यदि $p > 1$ या $p \leq 1$ हो।

Section—B

अण्ड—ब

6. (a) Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous but not differentiable at $x = 0$.

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर सतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।

(b) Prove that every differentiable function is continuous but the converse need not be true.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत होता है परन्तु इसका विलोम सही हो, यह आवश्यक नहीं है।

7. (a) Let $f(x)$ be defined in $[a, b]$ as follows :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Show that f is not Riemann integrable on (a, b) .

जब x अरिरेय है -
जब x अरिरेय है

$$f(x) = \begin{cases} L, & \text{जब } x \text{ अरिरेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ अरिरेय है} \end{cases}$$

यदि f अन्तर $[a, b]$ पर सतत
रहता है तो f अन्तर $[a, b]$ पर सतत
रहता है।

(b) Prove that constant function is Riemann integrable in $[a, b]$

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरन्तर फलन अन्तर
 $[a, b]$ पर सतत रमकलनीय होता है।

8. (a) Prove that

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

is convergent.

सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

अभिप्राय है।

(b) Test the convergence of $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$.

रमकलन $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$ की अभिसारिता का
परीक्षण कीजिए।

9. Find the points of discontinuity of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{when } x = 0 \\ \frac{1}{2} - x, & \text{when } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{when } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x, & \text{when } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, & \text{when } x = 1. \end{cases}$$

निम्नलिखित फलन के असतता के बिन्दु ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{जब } x = 0 \\ \frac{1}{2} - x, & \text{जब } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{जब } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x, & \text{जब } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, & \text{जब } x = 1 \end{cases}$$