Code No. : 2074

B. A./B. Sc. (Part II)

Examination, 2021-22

MATHEMATICS

Paper Fourth

(Statics and Dynamics)

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 50*

Note : (i) Attempt *five* questions in all.

(ii) Question No. **1** is ***compulsory.***

(iii) Answer *two* questions from Section **A** and Section **B** each.

(iv) All questions carry equal marks.

नोट : (i) कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) प्रश्न संख्या 1 ***अनिवार्य*** है।

P. T. O.

https://www.suksn.com

(iii) खण्ड **'अ'** तथा खण्ड **'ब'** प्रत्येक से ***दो-दो*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. Answer all parts of the following :

निम्नलिखित सभी भागों के उत्तर दीजिए :

(a) For a common catenary, prove that :

$$x = c \log (\sec \Psi + \tan \Psi)$$

किसी सामान्य कैटेनरी के लिए सिद्ध कीजिए :

$$x = c \log (\sec \Psi + \tan \Psi)$$

(b) State Lami's theorem of forces.

बलों के लामी के प्रमेय का सिद्धान्त लिखिए।

(c) Define Simple Harmonic Motion (SHM).

सरल आवर्त गति को परिभाषित कीजिए।

(d) Prove that the acceleration of a particle moving in a curve with uniform speed is $\rho\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2$.

सिद्ध कीजिए कि एकसमान चाल से किसी वक्र पर गतिमान किसी कण का त्वरण $\rho\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2$ होता है।

https://www.suksn.com

(e) Write down the general condition of equilibrium of a rigid body under the action of a system of coplanar forces.

एक समतलीय बल निकाय के अंतर्गत किसी दृढ़ पिण्ड के संतुलन के लिए व्यापक प्रतिबन्ध लिखिए।

Section—A

खण्ड—अ

2. A body rests in equilibrium upon another fixed body. The portions of the two bodies in contact have radii of curvatures ρ_1 and ρ_2 respectively. The centre of gravity of first body is at a height h above the point of contact and the common normal makes an angle α with the vertical. Prove that the equilibrium is stable or unstable according as :

$$h > \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \cos \alpha$$

or

$$h < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \cos \alpha .$$

https://www.suksn.com

कोई पिण्ड एक-दूसरे स्थिर (फिक्स्ड) पिण्ड पर संतुलन की अवस्था में है। पिण्डों के सम्पर्क बिन्दु पर वक्रता त्रिज्याएँ क्रमशः ρ_1 और ρ_2 हैं। पहले पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र सम्पर्कबिन्दु से h ऊँचाई पर स्थित है और उभयनिष्ठ अभिलम्ब ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाता है।

सिद्ध कीजिए संतुलन स्थायी होगा, यदि :

$$h < \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \cos \alpha$$

और अस्थायी होगा यदि :

$$h > \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \cos \alpha .$$

3. A uniform chain of length $2l$ and weight W is suspended from A and B in the same horizontal line. A load 'P' is now suspended from the middle point D of the chain and the depth of the point below AB is found to be 'h'. Show that the each terminal tension is $\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{l}{h}\right) + W\left(\frac{l^2 + h^2}{2h}\right)\right]$.

$2l$ लम्बाई एवं W भार की एक समांग जंजीर एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित बिन्दुओं A और B से लटकायी

https://www.suksn.com

जाती है। जंजीर के मध्य बिन्दु D से से भार 'P' लटकाने पर D की AB से गहराई 'h' हो जाती है। दिखाइये कि प्रत्येक सिरे पर तनाव $\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{l}{h}\right)+W\left(\frac{l^2+h^2}{2h}\right)\right]$ है।

4. A particle is performing SHM of period T about centre O and it passes through a point P, where OP = b with velocity 'v' in the direction of OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$.

एक कण केन्द्र O के सापेक्ष सरल आवर्त गति कर रहा है जिसका आवर्तकाल T है। कण बिन्दु P से OP दिशा में वेग v से गुजरता है, जहाँ OP = b है। सिद्ध कीजिए कि कण बिन्दु P पर पुनः $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$ समय के पश्चात् लौटेगा।

5. A particle is free to move on a smooth vertical circular wire of radius 'a'. It is projected from lowest point with velocity just sufficient to carry it

https://www.suksn.com

to the highest point. Show that the reaction between the particle and the wire vanishes after time $\sqrt{\frac{a}{g}}\log\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$.

एक कण 'a' त्रिज्या के एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार तार पर चलने के लिए स्वतन्त्र है। कण को निम्नतम बिन्दु से उतने ही वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है जो कि उसे उच्चतम बिन्दु तक पहुँचा सके। सिद्ध कीजिए कि कण व तार के मध्य प्रतिक्रिया बल $\sqrt{\frac{a}{g}}\log\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)$ समय के पश्चात् समाप्त हो जाता है।

Section—B

खण्ड—ब

6. (a) A heavy uniform rod rests with one end against a vertical wall and with a point in its length resting on a smooth peg. Find the position of equilibrium and determine whether it is stable or unstable.

एक भारी समांग छड़ जिसका एक सिरा एक चिकनी दीवार से टिका है और छड़ की लम्बाई का एक

https://www.suksn.com

बिन्दु एक चिकनी खूँटी पर स्थित है। संतुलन की अवस्था ज्ञात कीजिए तथा ज्ञात कीजिए कि संतुलन स्थायी है या अस्थायी।

(b) A particle moves in a plane curve so that its tangential acceleration is constant and the magnitude of tangential velocity and normal acceleration are in constant ratio. show that the intrinsic equation of the path is of the form $s = A\Psi^2 + B\Psi + C$, where A, B and C are constants.

एक बिन्दु पर समतलीय वक्र पर इस प्रकार गतिमान है कि इसका स्पर्शरेखीय त्वरण अचर है तथा स्पर्शरेखीय वेग एवं अभिलम्ब रेखीय त्वरण का परिमाण एक अचर अनुपात में हैं। सिद्ध कीजिए कि पथ का नैज्य समीकरण $s = A\Psi^2 + B\Psi + C$ है, जहाँ A, B एवं C नियतांक हैं।

7. (a) If the ends of a uniform inextensible string of length 'l' hanging freely under gravity slides on a fixed rough horizontal rod whose

https://www.suksn.com

coefficient of friction is μ, show that at most they can rest at a distance :

$$\mu \log\left(\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\right).$$

यदि 'l' लम्बाई की एक समांग अवितान्य डोरी जो कि गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से लटकी है, के किनारे एक स्थिर, खुरदुरी क्षैतिज छड़ जिसका घर्षण गुणांक μ है, पर फिसलते हैं। सिद्ध कीजिए कि विरामावस्था में वे एक-दूसरे से अधिकतम :

$$\mu \log\left(\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}\right)$$

दूरी पर रह सकते हैं।

(b) A heavy particle slides down on a smooth cycloid starting from rest at the cusp, the axis being vertical and vertex downwards. Prove that the magnitude of acceleration of the particle is equal to 'g' at every point of the path.

https://www.suksn.com

एक भारी कण एक चिकने वक्रज जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर व शीर्ष नीचे की ओर है, के उभयाग्र से विरामावस्था से नीचे की ओर फिसलता है। सिद्ध कीजिए कि पथ के प्रत्येक बिन्दु पर कण का त्वरण 'g' के बराबर होगा।

8. (a) Show that the system of coplanar forces acting on a rigid body (not in equilibrium) can be reduced into a single force or a single couple.

सिद्ध कीजिए कि किसी दृढ़ पिण्ड पर कार्यरत एक समतलीय बलों (जो कि संतुलन में नहीं है) को या तो एक बल या एक बलयुग्म में वियोजित किया जा सकता है।

(b) A particle of mass m executes SHM in a line joining the points A and B on a smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tension in equilibrium are each T. Show that the time of oscillation is $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$, where l and l' are the

https://www.suksn.com

extensions of the strings beyond their natural lengths.

एक चिकनी मेज पर स्थित दो बिन्दुओं A और B से दो प्रत्यास्थ डोरियों द्वारा बँधा m द्रव्यमान का एक कण सरल आवर्त गति करता है। यदि संतुलन की अवस्था में प्रत्येक डोरी का तनाव T है, तो सिद्ध कीजिए कि एक दोलन में लगा समय $2\pi\sqrt{\frac{mll'}{T(l+l')}}$ है, जहाँ l व l' डोरियों के उनकी प्राकृतिक लम्बाइयों से परे विस्तार है।

9. (a) Forces P, Q and R act along the sides of a triangle formed by the lines $x+y=1$, $y-x=1$ and $y=2$. Find the magnitude of the resultant and equation of along which it acts.

सरल रेखाओं $x+y=1$, $y-x=1$ व $y=2$ द्वारा बने त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश बल P, Q और R क्रियाशील हैं। परिणामी बल का परिमाण और क्रिया-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

https://www.suksn.com

(b) A particle falls under gravity in a resisting medium whose resistance varies as the square of the velocity. Find the motion of particle falling from rest.

एक कण विरामावस्था से गुरुत्व के आधीन किसी प्रतिरोधी माध्यम में गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग के समानुपाती है। कण की गति ज्ञात कीजिए।

https://www.suksn.com