Code No. : 5123

B. Sc. (Third Semester)

Examination, 2022-23

MATHEMATICS

(Algebra and Mathematical Methods)

Course Code : B030301T

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 50*

Note : (i) Question No. **1** is ***compulsory***.

(ii) All questions carry equal marks.

नोट : (i) प्रश्न संख्या 1 ***अनिवार्य*** है।

(ii) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. Answer all parts of the following : 2×5=10

निम्नलिखित सभी भागों के उत्तर दीजिए :

(a) (i) If $a^k \equiv b^k \pmod n$, then $a \equiv b \pmod n$.

(True/False)

यदि $a^k \equiv b^k \pmod n$, तो $a \equiv b \pmod n$ ।

(सत्य/असत्य)

P. T. O.

(ii) If $ac \equiv bc \pmod n$, then $a \equiv b\left(\bmod \dfrac{n}{d}\right)$, where $d = \gcd(c, n)$.

(True/False)

यदि $ac \equiv bc \pmod n$, तो $a \equiv b\left(\bmod \dfrac{n}{d}\right)$, जहाँ $d = \gcd(c, n)$ ।

(सत्य/असत्य)

(b) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Does $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exist ? 2

मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

क्या $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ का अस्तित्व है ?

(c) Find the number of ring homomorphism from $\mathbf{Z}_4$ to $\mathbf{Z}_{10}$. 2

$\mathbf{Z}_4$ से $\mathbf{Z}_{10}$ के रिंग होमोमॉरफिज़्म की संख्या ज्ञात कीजिए।

(d) If $y_1 = 1 - x_1, y_2 = x_1(1 - x_2), y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3), \ldots, y_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_n)$, prove that the Jacobian $J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}$. 2

यदि $y_1 = 1 - x_1, y_2 = x_1(1 - x_2), y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3), \ldots, y_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_n)$, सिद्ध कीजिए कि जैकोबियन $J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}$ ।

(e) Write the statement of Euler's theorem. 2

यूलर प्रमेय का कथन लिखिए।

2. (a) If p and q are two distinct prime numbers, $a^p \equiv a \pmod q$ and $a^q \equiv a \pmod p$, then show that $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$. 3

यदि p एवं q दो अलग-अलग संख्याएँ हैं, $a^p \equiv a \pmod q$ और $a^q \equiv a \pmod p$, तो दिखाइए कि $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$ ।

(b) Show that : 3

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbf{R} \right\}$$

is group with respect to multiplication.

दिखाइए कि $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid 0 \neq a \in \mathbf{R} \right\}$ गुणन के संबंध में समूह है।

(c) If in a group G, $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ for $a, b \in G$, then find the order of b. 4

यदि एक समूह G में $a, b \in G$ के लिए $a^5 = e, aba^{-1} = b^2$ है, तो b का क्रम ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

(a) Find last digit of $(38)^{100}$. 2

$(38)^{100}$ का अंतिम अंक ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the set A_n of all even permutations degree n forms a finite group of order $\frac{n!}{2}$ with respect to permutation multiplication. 4

सिद्ध कीजिए कि घात n के सभी सम क्रमपरिवर्तनों का समुच्चय क्रमचय, गुणन के संबंध में क्रम $\frac{n!}{2}$ का एक परिमित समूह बनाता है।

https://www.suksn.com

(c) Let H and K be subgroups of a finite group G and let $o(H) > \sqrt{|o(G)|}$, $o(K) > \sqrt{|o(G)|}$. Then show that $H \cap K \neq \{e\}$. 4

माना कि H और K किसी परिमित समूह G के उपसमूह हैं और माना $o(H) > \sqrt{|o(G)|}$, $o(K) > \sqrt{|o(G)|}$, तो दिखाइए कि $H \cap K \neq \{e\}$ ।

3. (a) Show that the factor group of abelian group is abelian. 2

दिखाइए कि अबेलियन समूह का कारक समूह अबेलियन है।

(b) Show that every homomorphic image of a group G is isomorphic to a quotient group of G. 4

समूह G की प्रत्येक समरूपी छवि, G के भागफल समूह के लिए समरूपी होती है।

(c) Prove that the quotient $\frac{2Z}{8Z} \cong Z_4$. 4

सिद्ध कीजिए कि भागफल समूह $\frac{2Z}{8Z} \cong Z_4$ ।

Or

(अथवा)

(a) Prove or disprove that the sum of two subrings of ring R is subring of R. 5

सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि रिंग R के दो सबरिंग का योग रिंग R का सबरिंग है।

(b) Show that $Q\left[\sqrt{2i}\right]$ is field. 5

दिखाइए कि $Q\left[\sqrt{2i}\right]$ क्षेत्र है।

4. (a) Let $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ be a function defined by :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Show that the function f is continuous at the point (0, 0) but not differentiable at the (0, 0). 5

मान लीजिए $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

दर्शाइए कि फलन f बिन्दु (0, 0) पर संतत है परन्तु (0, 0) पर अवकलनीय है।

https://www.suksn.com

(*b*) Find the maxima and minima points of the function : 5

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$$

फलन $f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$ के अधिकतम और न्यूनतम बिंदु ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

(a) Find the Laplace transformation of $\left[\frac{1 - e^t}{t}\right]$. 3

$\left[\frac{1 - e^t}{t}\right]$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

(b) Evaluate $L^{-1}\left[\log\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)\right]$.

$L^{-1}\left[\log\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)\right]$ का मूल्यांकन कीजिए।

(c) Evaluate the inverse Laplace transformation of $\left[\frac{s}{s^4 + s^2 + 1}\right]$. 4

$\left[\frac{s}{s^4 + s^2 + 1}\right]$ के व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण का मूल्यांकन कीजिए।

5. Find the Fourier series of the function defined as :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{for } 0 < x < \pi \\ -x - \pi, & \text{for } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

and $f(x + 2\pi) = f(x)$. 10

फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{for } 0 < x < \pi \\ -x - \pi, & \text{for } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

और $f(x + 2\pi) = f(x)$ के रूप में परिभाषित फलन की फूरियर श्रृंखला ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

(a) Show that the functional :

$$I[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)]\, dx$$

is linear in the class $C^1[a, b]$, where $C^1[a, b]$, denotes the space of continuously differentiable function on $[a, b]$. 2

दिखाइए कि फंक्शनल :

$$I[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)]\, dx$$

वर्ग $C^1[a,b]$, में रैखिक है, जहाँ $C^1[a,b]$, $[a, b]$ पर अलग-अलग फलन की निरंतरता के स्थान को दर्शाता है।

(b) If the functional :

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x).y'(x))\,dx$$

where a and b are constants $y(x)$ is twice continuously differentiable and $F(x, y(x), y'(x))$ is twice continuously differentiable with respect to its arguments x, y and y', then prove that : 3

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

यदि फंक्शनल :

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x).y'(x))\,dx$$

जहाँ a एवं b स्थिरांक हैं, $y(x)$ दो बार निरंतर अवकलनीय है और $F(x, y(x), y'(x))$ इसके तर्कों x, y और y' के संबंध में दो बार लगातार अवकलनीय है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$